UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 5 y 7 de mayo de 2009.

Temas :
Matriz transpuesta. Matriz simétrica.
Determinantes; propiedades de los determinantes.
Matriz adjunta de una matriz nxn. Propiedades.
Secciones 1.9, 2.1, 2.2, del texto.

Observación importante:
es muy importante que Usted resuelva también muchos ejercicios del texto.

1.- Diga, justificando, qué tamaño debe tener una matriz para que exista su transpuesta.

2.- Averigue cuales de las siguientes propiedades se cumplen y cuales no :
2a) $(A^t)^t = A$; **2b)** $(A+B)^t = A^t+B^t$; **2c)** $(A+B)^t=B^t+A^t$;
2d) siempre existen los productos (filas por columnas) AA^t , A^tA , cualquiera que sea el tamaño de A ;
2e) si A, B son matrices de tamaño nxn , entonces $(AB)^t=A^tB^t$;
2f) si A, B son matrices de tamaño nxn , entonces $(AB)^t=B^tA^t$;
2g)si existe la matriz inversa, $B=A^{-1}$, de A , entonces $B^t = (A^t)^{-1}$, [es decir : la transpuesta de la inversa es igual a la inversa de la transpuesta];
2h) A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n si y sólo si su transpuesta, A^t, es equivalente por filas a la matriz identidad I_n .

3.- Demuestre las siguientes afirmaciones :
3a) Si A es una matriz simétrica, entonces A^2 también es matriz simétrica;
3b) si A es matriz simétrica y si A tiene inversa, entonces su inversa también es simétrica;
3c) sean A, B matrices del mismo tamaño. Si A, A+B son ambas simétricas, entonces necesariamente B también debe ser simétrica;
3d) sean A, B matrices simétricas del mismo tamaño. Entonces la matriz C=AB+BA es simétrica.

4a) Dé un ejemplo de dos matrices A, B, de tamaño nxn, simétricas, tales que su producto, AB no sea matriz simétrica;
4b) Dé un ejemplo de dos matrices A, B, de tamaño nxn, simétricas, tales que su producto, AB sea matriz simétrica;

5.- Demuestre que si el producto AB (de dos matrices simétricas del mismo tamaño) es una matriz simétrica, entonces AB=BA .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

6.-Una matriz nxn, $A=[a_{ij}]$ se llama "**antisimétrica**" si y sólo si, para toda componente a_{ik} , se tiene $a_{ik}= -a_{ki}$. ¿ Es cierto que en una matriz antisimétrica todos los elementos de la "diagonal" [es decir: todas las componentes del tipo a_{kk}] son nulos ?

7.- Una matriz, A, de tamaño nxn se llama "**ortogonal**" si y sólo si $A^t=A^{-1}$;
7a) Dé un ejemplo de matriz 2x2, ortogonal;
7b) Diga si es cierto o falso que la matriz $A=\begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix}$ es ortogonal;
7c) Demuestre que no puede existir una matriz ortogonal cuyo determinante sea = 7 .

8.- De una matriz antisimétrica $A=[a_{ij}]$, de tamaño 2x2 se conoce que = $a_{12} = 1$; halle A, A^{-1} .

9.- Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, halle los menores $M_{1,3}$, $M_{2,4}$, $M_{3,2}$.

10.- Dadas dos matrices antisimétricas A, B de tamaño 3x3, se conoce que el menor $M_{1,3}$ de A es igual al menor $M'_{1,3}$ de B. ¿Se puede entonces llegar a la conclusión que A=B ? Explique.

11.- a) Diga si es cierto o falso que $|A^t|=|A|$;
b) diga si es cierto o falso que el determinante de una matriz antisimétrica de tamaño nxn, con **n impar,** es necesariamente nulo;
c) dé un ejemplo de matriz antisimétrica con **n par**, cuyo determinante no sea nulo.

12.-Dada una matriz A de tamaño nxn, diga que diferencia hay entre el "menor M_{ij}" y el "cofactor A_{ij} " .

13.- Dada una matriz A de tamaño nxn, diga que diferencia hay entre el "determinante, $|M_{ij}|$, del menor M_{ij}" y el "cofactor A_{ij} " .

14.- a) Dada la matriz 4x4, $A=[a_{ij}]$, escriba la <u>expansión por cofactores en la segunda fila</u> .
b) diga que relación tiene el número representado por esta expansión, con $|A|$.

15.-a) Dada la matriz 4x4, $A=[a_{ij}]$, escriba la <u>expansión por cofactores en la tercera columna</u>
b) diga que relación tiene el número representado por esta expansión, con $|A|$.

16.- Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 7 & 11 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ usando la expansión por cofactores en la tercera columna.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

17.- Sea A una matriz de tamaño nxn y sea B otra matriz, obtenida efectuando sobre A varias operaciones elementales de fila, del tipo " $R_i \to R_i + k.R_s$ " ,[con $i \neq s$].
¿ Como estan relacionados los determinantes de A y B ? Explique.

18.- Calcule el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ efectuando sucesivamente las siguientes operaciones de fila : " $R_2 \to R_2 - R_1$ " , " $R_3 \to R_3 - R_1$ " , " $R_3 \to R_3 - 2R_2$ " ,

19.- Averigue qué efecto tienen sobre el determinante, las operaciones elementales de fila " $R_i \to k\, R_i$ " , " $R_i \leftrightarrow R_s$ " [con $i \neq s$].

20.- Demuestre que si A, B son matrices de tamaño nxn, equivalentes por filas, entonces det(A)=0 si y sólo si det(B)=0.

21.- Demuestre que la matriz A, de tamaño nxn, tiene inversa si y sólo si det(A)≠0 .

22.- Calcule los determinantes de las siguientes matrices, usando propiedades convenientes :
22a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; **22b)** $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$; **22c)** 3A ; **22d)** AB ; **22e)** BA ; **22f)** A^{-1} ;

22g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; **22h)** $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; **22i) I=** $\begin{bmatrix} 0 & 23 & 47 \\ -23 & 0 & -17 \\ -47 & 17 & 0 \end{bmatrix}$ **22j)** J= [-191] .

[**resuelva también un buen número de ejercicios de la sección 2.2 (pag. 201)**]

23.- Calcule los determinantes de las siguientes matrices :
23a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$; **23b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$; **23c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$, **23d)** $\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ x & -1 & 0 & 0 \\ y & 0 & -1 & 0 \\ z & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

23e) $E = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ x_1 & -1 \dots & \dots 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$ con $\begin{cases} E_{k,k} = -1 \text{ , si } k > 1; \\ E_{1,k} = a_{k-1} \text{ ;} \\ E_{k,1} = x_{k-1}, \text{ , si } k > 1; \\ E_{k,s} = 0 \text{ si } 1 < k \neq s > 1. \end{cases}$.

24.- Diga (justificando) si es cierto o falso que : $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$.

25.- Halle la matriz inversa de $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, **sin usar el método de Gauss-Jordan**, usando la propiedad : $A.Adj(A) = d.I_n$, siendo d=det(A) .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

26a) Usando la propiedad mencionada en el ejercicio anterior, demuestre que si A es de tamaño nxn y si $|A|$=det(A)$\neq$ 0 entonces se tiene : det(Adj(A)) = $|A|^{n-1}$;
26b) Demuestre que si B es una matriz 3x3 (con componentes reales) entonces el determinante de Adj(B) es un número positivo o nulo;
26c) Dada la matriz B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, demuestre que cualquiera que sea la matriz A, (de componentes reales), necesariamente : Adj(A)$\neq$ B
[es decir : B no puede ser adjunta de ninguna matriz de componentes reales].

27.- Demuestre que si det(A)=0 entonces det(Adj(A))=0 .

28.-Dada la matriz B **=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$, halle una matriz, A , tal que B=Adj(A) .

29a.- Explique que efecto tienen sobre el determinante de una matriz cuadrada, operaciones elementales de columna (análogas a las operaciones elementales de fila);
29b) Explique por qué <u>no es conveniente</u> usar operaciones elementales de columna en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

E30. Diga si es cierto o falso que dos matrices de tamaño nxn equivalentes por filas tienen el mismo determinante.

respuestas

1)No hay ninguna condición, ya que toda matriz tiene transpuesta.

2) son ciertas : a, b, c, d, f, g, h ; <u>e</u> es falsa.
Observaciones : <u>g</u> se justifica observando que $B^t(A^t)=(A^{-1})^tA^t= (AA^{-1})^t = (I_n)^t=I_n$;
<u>h</u> se puede justificar, usando el resultado de g y recordando que una matriz "cuadrada" tiene inversa si y sólo si es equivalente por filas a la matriz identidad, I_n . En efecto, por ejemplo : si A es equivalente por filas a I_n , entonces A tiene inversa, luego (por g) A^t tiene inversa, luego A^t es equivalente por filas a I_n .

3a) $(A^2)^t = (AA)^t = A^t A^t = AA = A^2 \Rightarrow A^2$ es simétrica;
3b) por **2g** $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$ [siendo A simétrica] $\Rightarrow$ A^{-1} es simétrica;
3c) si $A=A^t$, $(A+B)=(A+B)^t$, entonces , como B= -A+(A+B) , se tiene
$B^t = (-A)^t+(A+B)^t = -A + (A+B) = B \Rightarrow$ B es simétrica;
3d) $(AB+BA)^t=(AB)^t+(BA)^t = B^tA^t+A^tB^t = BA+AB = AB+BA$.
4a) Sean A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; entonces AB= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \neq (AB)^t$;
4b) Hay muchos ejemplos posibles; en el caso general, para que AB sea matriz simétrica (siendo A, B simétricas) , como $(AB)^t=B^tA^t= BA$, lo que hace falta es que AB=BA.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Por ejemplo podríamos considerar A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ y su inversa B= $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ya que toda matriz (invertible) conmuta con su inversa

5) vea **4b)** .

6) la condición $a_{ik}= -a_{ki}$, en el caso que sea i=k, se transforma en $a_{ii}= -a_{ii}$ y el único número real que es igual a su opuesto es el cero. Por lo tanto la afirmación es cierta.

7) La afirmación de 7b) es cierta y proporciona ejemplos para 7a);
7c) Como $|A^t|= |A|$ y como $A^t=A^{-1}$, se tiene que $|A|^2=|A^t|.|A|=|A^tA|=$
$= |A^{-1}A|= |I_n|= 1$ por lo tanto los únicos posibles valores para $|A|$ son ± 1 ($\neq 7$) .

8) Como $a_{1,1}=a_{2,2}=0$, $a_{2,1}=-a_{1,2} = -1$, se tiene A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9) $M_{1,3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$; $M_{2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$; $M_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

10) Efectivamente debe ser A=B , ya que, por ser las dos matrices antisimétricas, se tiene :
$a_{1,1}= 0=b_{1,1}$, $a_{3,3}=0=b_{3,3}$, $a_{1,3}= - a_{3,1}= - b_{3,1}=b_{1,3}$ y análogamente $a_{1,2}=b_{1,2}$, $a_{2,3}=b_{2,3}$ (los demás elementos pertenecen a los menores iguales).

11a) es cierto. La justificación es consecuencia del teorema 5 del texto , pag. 191.
[S.Grossman : "Algebra lineal" 5a edición]
11b) Es cierto**.** En efecto, si A es antisimétrica y de tamaño nxn , entonces $A^t=(-1)A$, por lo cual $|A^t|=(-1)^n|A|$, de manera que si n es impar, entonces $|A|=|A^t|=(-1)|A| \Rightarrow |A|=0$.
11c) $\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}$, con $a\neq 0$.

12) El "menor M_{ij}" es una matriz, mientras que el "cofactor A_{ij} " es un número.

13) $A_{ij} = (-1)^{i+j}| M_{ij}|$; si i+j= par, son iguales, si i+j= impar, son opuestos.

14a) $\sum_{i=1}^{4} a_{2,i}A_{2,i}= a_{2,1}A_{2,1} +a_{2,2}A_{2,2}+a_{2,3}A_{2,3}+a_{2,4}A_{2,4} = |A|$;
14b) representa el determinante de la matriz A [ver teorema 5, pag 191 del texto].

15a) $\sum_{i=1}^{4} a_{i,3}A_{i,3}= a_{1,3}A_{1,3} +a_{2,3}A_{2,3}+a_{3,3}A_{3,3}+a_{4,3}A_{4,3} = |A|$;
15b) representa el determinante de la matriz A [ver teorema 5, pag 191 del texto].

16) $|A| = (-1)^{1+3}.0.|M_{1,3}|+ (-1)^{2+3}.0.|M_{2,3}|+ (-1)^{3+3}.2.|M_{3,3}|+ (-1)^{4+3}.0.|M_{4,3}|=$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MA1116 abril-julio de 2009

$$= 0 - 0 + 2 \begin{vmatrix} 1 & 13 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

17) $|A|=|B|$ ya que las operaciones de fila del tipo :" $R_i \to R_i+k.R_s$" ,[con $i\neq s$] , **no cambian** el determinante .
ojo : los otros dos tipos de operaciones elementales de fila **cambian** el determinante [ver ejercicio 19].

18) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ $R_2\to R_2-R_1$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ $R_3\to R_3-R_1$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ $R_3\to R_3-2R_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

19) Si B se obtiene a partir de A efectuando la operación de filas :" $R_i\to k\, R_i$ " entonces $|B|= k.|A|$;
observación importante : esto implica, en particular, que si A es de tamaño nxn y se multiplican por k t<u>odas</u> las filas de A, obteniendo la matriz C=kA, entonces $|C|= k^n|A|$.

Si H se obtiene a partir de A con la operación de filas :" $R_i\leftrightarrow R_s$" ($i\neq s$) , entonces $|H|= -|A|$;
una consecuencia de esta propiedad es que una matriz cuadrada con dos filas iguales tiene determinante nulo.

20) Basta observar que toda operación elemental de fila tiene por efecto multiplicar el determinante por un número $\neq 0$ [respectivamente 1, k ($\neq 0$) , -1] .

21) A tiene inversa si y sólo si es equivalente por filas a la matriz identidad I_n la cual tiene determinante $\neq 0$ y dos matrices equivalentes por filas o tienen ámbas determinante nulo o ámbas determinante no nulo [por el resultado del ejercicio anterior].

22) $|A| = -14$; $|B|= 17$; $|3A|= 3^2(-14)= - 126$; $|AB|=|A|.|B|= (-14)(17)= - 238$; $|BA|=|B|.|A|= (17)(-14) = - 238$; $|A^{-1}|=(-14)^{-1}= \frac{-1}{14}$;

$|G|= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = - 57$; $|H|= 36$ [el determinante de una matriz triangular inferior (o superior) se obtiene multiplicando las componentes de la diagonal] ;
$|I| = 0$ [determinante de una matriz antisimétrica de tamaño 3x3] ; $|J|= -191$.

23c) Efectuaremos sucesivamente las siguientes operaciones elementales de fila :
$R_4\to R_4-aR_3$, $R_3\to R_3-aR_2$, $R_2\to R_2-aR_1$, es decir : comenzando con la última fila y llegando hasta la segunda fila, a cada una le restaremos la anterior multiplicada por <u>a</u> :

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a)\\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a)\end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix}b-a & c-a & d-a\\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a)\\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a)\end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a).\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{bmatrix} =$$

$R_3 \to R_3-bR_2,\ R_2 \to R_2-bR_1 \to (b-a)(c-a)(d-a).(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1 & 1\\ c & d\end{vmatrix} =$
$= (b-a)(c-a)(d-a).(c-b)(d-b)\,(d-c)$.

Observación.
Las matrices **23a,b,c**) se llaman "matrices de Vandermonde" ; indicaremos con V_n la matriz de Vandermonde de tamaño (n+1)x(n+1) , cuya k-ésima columna es la transpuesta de la siguiente fila : $[1\ \ x_k\ \ (x_k)^2 \dots (x_k)^n\ ]$. Con el mismo método que usamos en este ejercicio, a saber, restando a cada fila (desde la última hasta la segunda) la fila anterior multiplicada por x_1 , se obtiene $\det(V_n)= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1).\det(V_{n-1})$ y procediendo por inducción y tomando en cuenta el hecho que $\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_{n-1} & x_n\end{vmatrix} = (x_n-x_{n-1})$ se obtiene que

$$\det(V_n) = \prod_{i<k}(x_k-x_i)\ .$$

23d) aplicando las operaciones elementales de fila :
$R_1 \to R_1+aR_2$, $R_1 \to R_1+bR_3$, $R_1 \to R_1+cR_4$, se tiene :

$$\det\begin{bmatrix}1 & a & b & c\\ x & -1 & 0 & 0\\ y & 0 & -1 & 0\\ z & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1+ax+by+cz & 0 & 0 & 0\\ x & -1 & 0 & 0\\ y & 0 & -1 & 0\\ z & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = (-1)^3(1+ax+by+cz) = -(1+ax+by+cz)\ ;$$

23e) con el mismo método de 23d) se obtiene : $|E| = (-1)^n(a_0+a_1x_1+\dots+a_nx_n)$.

24) Es **falso**, ya que $\begin{vmatrix}a+a' & b+b'\\ c+c' & d+d'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+a' & b\\ c+c' & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a+a' & b'\\ c+c' & d'\end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a' & b\\ c' & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & b'\\ c & d'\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{vmatrix}\ .$$

25) Hallando previamente todos los cofactores de G :

$G_{1,1}= \begin{vmatrix}-1 & 5\\ 2 & 7\end{vmatrix} = -17$; $G_{1,2}= -\begin{vmatrix}2 & 5\\ 0 & 7\end{vmatrix} = -14$; $G_{1,3}= \begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 4$;

$G_{2,1}= -\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 7\end{vmatrix} = -20$; $G_{2,2}= \begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 7\end{vmatrix} = 7$; $G_{2,3}= -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} = -2$;

$G_{3,1}= \begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{vmatrix} = 7$; $G_{3,2}= -\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix} = -11$; $G_{3,3}= \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -5$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

$\mathrm{Adj}(G) = \begin{bmatrix} -17 & -20 & 7 \\ -14 & 7 & -11 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$; det(A)= -57 ; $G^{-1}= \dfrac{\mathrm{Adj}(G)}{\det(G)} = \dfrac{1}{57}\begin{bmatrix} 17 & 20 & -7 \\ 14 & -7 & 11 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

26a) $A.\mathrm{Adj}(A) = d.I_n$, con $d=|A| \Rightarrow \det(d.I_n) = d^n.\det(I_n) = d^n$;
$|A.\mathrm{Adj}(A)| = d.|\mathrm{Adj}(A)| = d^n \Rightarrow |\mathrm{Adj}(A)| = d^n/d = d^{n-1}$.

26b) si n=3 entonces $|\mathrm{Adj}(A)| = d^{n-1} = d^2 \geq 0$;

26c) como $|\mathrm{Adj}(A)| = d^2 \geq 0$, det(B)= -1 , no puede ser Adj(A) = B .

27) Si A es la matriz nxn nula, entonces todos sus cofactores son nulos y Adj(A) también es la matriz nula, de manera que $|\mathrm{Adj}(A)| = 0$.
Si A no es la matriz nula (pero $|A|=0$) , sea $\mathbf{a}_k$ una columna no nula de A y observemos que $\mathbf{a}_k$ es solución del sistema homogéneo $(\mathrm{Adj}(A))\mathbf{x}=\mathbf{0}$ [ya que si $|A| = 0$, entonces $\mathrm{Adj}(A)A=B= d.I_n=0.I_n=\mathbf{0}$ y la k-ésima columna de B se obtiene multiplicando Adj(A) por la k-ésima columna de A].
Si el sistema homogéneo $(\mathrm{Adj}(A))\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene soluciones no nulas, su matriz de coeficientes (que es cuadrada) no puede ser equivalente por filas a la matriz identidad I_n por lo cual debe tener determinante nulo.

28) Sea B=Adj(A). Se tiene: $|B|=b= 9$, $|A|=a$, $b=a^{n-1}=a^2$, $a=\pm 3$;
$A.\mathrm{Adj}(A)=A.B=a.I_n \Rightarrow A=a.I_n.B^{-1}=(\pm 3)I_n.B^{-1}$ =

$= (\pm 3)\,\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & 14 & 4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ por lo cual $\Rightarrow$ $A= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -7 & 14 & 4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ o su opuesta : $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -14 & -4 \\ -8 & 7 & 2 \\ 4 & -8 & -1 \end{bmatrix}$.

29a) una consecuencia del teorema 5 de pag. 191 es que las operaciones de columna tienen los mismos efectos (para el cálculo de determinantes) que las operaciones de fila : al intercambiar dos columnas, el determinante cambia de signo; al multiplicar una columna por k, el determinante queda multiplicado por k; al sumarle a una columna otra columna multiplicada por una constante, el determinante no cambia.

29b) Las operaciones elementales de columna **no** transforman al sistema dado en otro equivalente; por ejemplo, dado un sistema con las incógnitas x_1, x_2, x_3 , si efectuásemos la operación $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1 + 7\mathbf{C}_2$, obtendríamos un nuevo sistema con las nuevas incógnitas x_1', x_2', x_3', tales que $x_1'=x_1$, $x_2'=x_2-7x_1$, $x_3'=x_3$.

SE30. Es falso. En efecto la única operación elemental de fila que no altera el determinante, es $R_i \rightarrow R_i + k\,R_i$.
La operación $R_i \leftrightarrow R_s$, (con $i \neq s$), tiene el efecto de multiplicar el determinante por -1 ;
la operación $R_i \rightarrow k\,R_s$, (con $k \neq 0$), tiene el efecto de multiplicar el determinante por k.
Sin embargo es importante observar que las tres operaciones elementales de fila conservan las propiedades "det(A)=0" y "det(A) $\neq$ 0 " , es decir : aplicando cualquier número de operaciones elementales de fila a cierta matriz A, nxn, hasta obtener una matriz, B, se tiene que det(B) = 0 si y sólo si det(A)=0 y det(B) $\neq$ 0 si y sólo si det(A)$\neq$0.